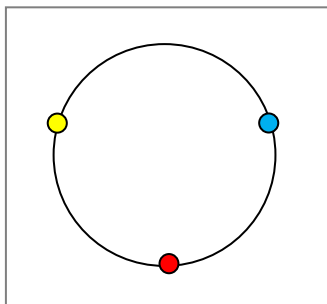


7 класс

Задача 1.

Три велосипедиста начинают равномерное движение по кругу, находясь первоначально, на одинаковом расстоянии в 300 метров друг от друга.



Расстояние отмерено по траектории движения. Скорости велосипедистов относятся как 1, 2, 3. Велосипедисты расположены по порядку возрастания скорости. Скорость первого велосипедиста 2 м/с. Через какое время после старта, все велосипедисты будут в одной точке круговой трассы? Через какое время они вновь сойдутся в одной точке?

Решение.

Первый раз «троица» встретится в нижней (на рисунке) точке. Считаем, что «жёлтый» - это первый (верхний слева). Правый верхний – второй. Первый проходит  $1/3$  круга, второй  $2/3$  круга, третий – полный круг. Первое время встречи  $300/2 = 150$  секунд. Вторая одновременная встреча всех троих происходит опять же в этой точке. Первый проходит 1 круг, второй – 2, третий – 3. Время второй встречи происходит через 450 секунд.

Задача 2.

Сигнальный буй (поплавок) изготовлен в форме цилиндра высотой 2 м и площадью сечения  $400 \text{ см}^2$ . На изготовление буя потрачено 10 кг металла. Какую массу балласта нужно засыпать внутрь буя, чтобы в солёной морской воде буй устойчиво плавал, погрузившись в воду на  $3/4$  своей длины? Плотность солёной воды равна  $1,1 \text{ г/см}^3$ .

Решение.

Средняя плотность буя после засыпки балласта должна быть  $0,75 \cdot 1,1 = 0,825 \text{ г/см}^3$ . Это следует из решения задачи плавания: коэффициент погружения плавающего тела равен

отношению плотностей  $\frac{h}{H} = \frac{\rho_{\text{тела}}}{\rho_{\text{жидкости}}}$ .

$$\frac{m + x}{S \cdot H} = 0,825 \rightarrow 400 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 0,825 \cdot 10^3 - 10 = 56 \text{ кг}$$

Задача 3.

Вася приготовил себе сладкий напиток объёмом  $200 \text{ см}^3$ , размешав в  $150 \text{ см}^3$  воды 60 г сладкого сиропа. Плотность напитка оказалась равной  $1,05 \text{ г/см}^3$ . В это время телефонный звонок отвлек Васю от своего любимого напитка. Второй любитель сладкого (его имя история умалчивает) воспользовался благоприятной ситуацией, отлил из стакана Васи 100 мл напитка, долил в него чистой воды и бросил туда же кусочек сахара массой 5 г.

Определите плотность сиропа, который использовал Вася, приготавливая себе напиток. Определите плотность напитка, который Вася выпил после телефонного звонка. Сможет ли Вася определить подмену (он очень хорошо чувствует процент сладости напитков)?

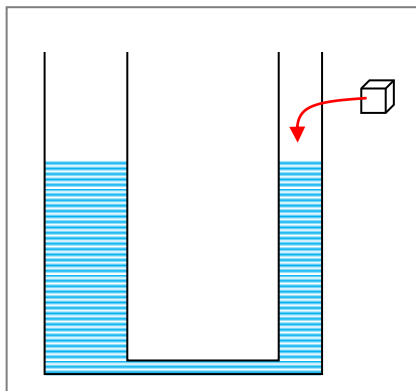
**Считайте**, что сахар, растворяясь в воде, не изменяет её объема, а лишь увеличивает плотность раствора.

Решение

При изготовлении напитка Вася использовал сироп объёмом  $50 \text{ см}^3$ , в котором было 10 г сахара. Значит в отлитом напитке ( $100 \text{ см}^3$ ) было 5 граммов сахара. Эти 5 г и были

«случайно» добавлены потом «злоумышленником», поэтому сладость напитка Васи «не пострадала». Вася может не заметить подмены.

#### Задача 4.



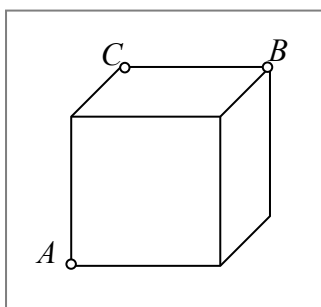
В сообщающиеся сосуды залита вода. Площади сечений сосудов различаются в 2 раза. Площадь сечения узкого сосуда равна  $2a^2$ . В этот узкий сосуд бросают кубик с размером ребра ( $a$ ) изготовленного из материала, плотность которого в 2 раза меньше плотности воды. Определите изменение уровня воды в сообщающихся сосудах. Величина  $a = 2$  см.

#### Решение

Добавление кубика массой  $m = \frac{1}{2}a^3 = 4$  г эквивалентно добавлению в левый сосуд 4 граммов воды, объём которой равен  $4$  см<sup>3</sup>. Этот объём воды «делится» между сосудами пропорционально их площади сечения. В левый сосуд попадёт  $\frac{2}{3}4 = \frac{8}{3}$  см<sup>3</sup>, в правый  $\frac{1}{3}4 = \frac{4}{3}$  см<sup>3</sup>. уровень воды поднимется на  $\Delta h = \frac{4}{3(2 \cdot 2^2)} = \frac{1}{6}$  см

**8 класс**

**Задача 1.**



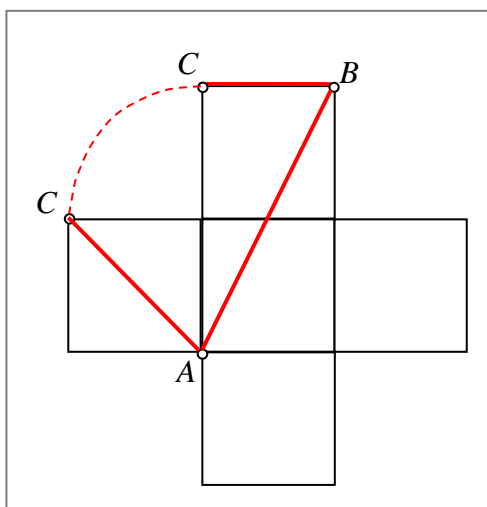
Божья коровка ползёт по поверхности куба с размером ребра 1 м. Скорость движения 1 см/с. и не зависит от расположения грани куба. За какое минимальное время божья коровка пройдёт маршрут А-В-С-А?

**Решение**

Рисуем «развёртку» куба, на которой отмечаем кратчайший путь движения. Его длина равна  $S = \sqrt{1^2 + 2^2} + 1 + \sqrt{1^2 + 1^2} = 1 +$

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 4,65 \text{ м}$$

$$\text{Время движения } t = \frac{S}{v} = \frac{465}{1} = 465 \text{ с}$$



**Задача 2.**

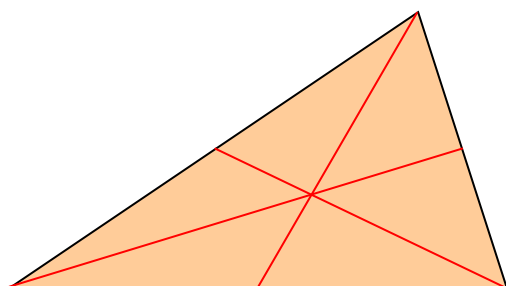
Плоская деталь в форме параллелограмма изготовлена по следующей схеме. Картонная модель параллелограмма была разделена большой диагональю (на два треугольника). Затем каждый треугольник был разделён медианами на 6 частей. Затем отдельные одинаковые по форме части были заменены копиями, изготовленными из разных металлов. Использованные металлы и их плотности

представлены в таблице. Определите среднюю плотность «целого» параллелограмма, собранного из отдельных металлических деталей.

Металл	Плотность г/см <sup>3</sup>
Алюминий	2,7
Олово	7,3
Медь	8,9
Серебро	10,5
Свинец	11,3
Золото	19,3

**Решение**

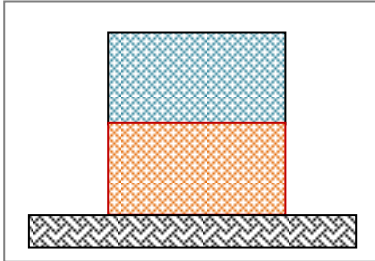
«Большая» диагональ делит параллелепипед на два одинаковых треугольника, поэтому достаточно рассчитать среднюю плотность только одного треугольника. (Можно почитать учебник Л. С. Атанасян и др. «Геометрия 7,8,9», Просвещение, 2008, стр. 153, зад. 571)



Легко доказывается, что медианы делят треугольник на 6 одинаковых по площади треугольников. Поэтому средняя плотность равна «среднему арифметическому» плотностей используемых металлов.

$$\bar{\rho} = \frac{m}{S} = \frac{\sum_{k=1}^6 \rho_k \cdot S / 6}{S} = \frac{\sum_{k=1}^6 \rho_k}{6} = \frac{60}{6} = 10 \text{ г/см}^3.$$

### Задача 3.



Куб состоит из двух одинаковых частей, изготовленных из разных металлов (меди и алюминия). Горячий куб ставят на подставку, которая очень плохо проводит тепло. При каком положении куба (медной частью вниз или вверх) куб остывает быстрее? Свой ответ следует обосновать.

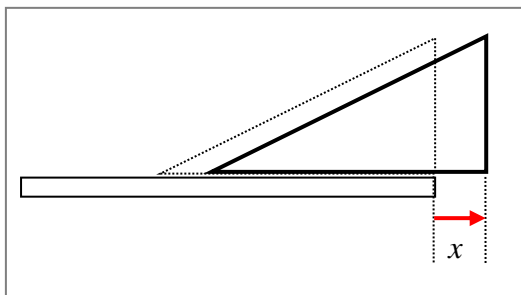
Для решения задачи нужно знать, что медь примерно в 2 раза лучше проводит тепло, чем алюминий.

### Решение

Куб остынет быстрее, если его поставить алюминиевой частью вниз. Медь лучше проводит тепло, поэтому поверхность меди будет всегда более горячая, чем поверхность алюминия. Отток тепла от кубика пропорционален разности температур кубика и окружающего воздуха. Поэтому, когда мы поставим кубик медной его частью вверх, то остывающая поверхность в большей степени будет медной. Отношение поверхностей

$$\frac{S_{\text{меди}}}{S_{\text{алюминия}}} = \frac{3}{2}.$$

### Задача 4.



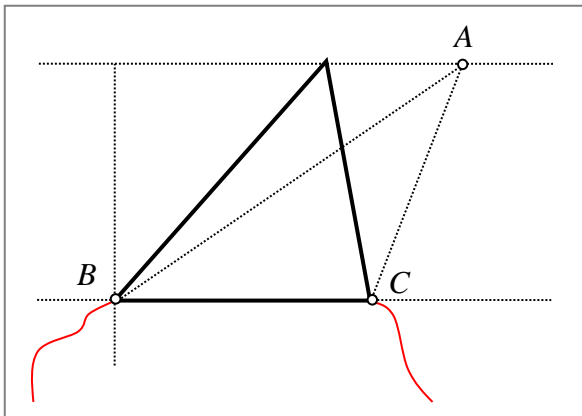
На краю стола стоит прямоугольный треугольник с длиной основания 30 см. На какое минимальное расстояние нужно очень медленно сдвинуть треугольник, чтобы он опрокинулся (упал со стола)? Попробуйте решить эту задачу экспериментально (если вы не смогли решить её теоретически) с помощью линейки и треугольника, вырезанного из картона.

### Решение

Первоначально нужно доказать, что центр масс однородного треугольника находится на пересечении медиан. Медианы пересекаются в точке, которая делит их в отношении 2-1 («два к одному»). Чтобы куб опрокинулся его нужно сдвинуть на третью часть его основания, на 10 см.

### Задача 5.

Треугольник сделан из проволоки. Высота и основание треугольника равны по 1 м. Сопротивление одного метра проволоки, из которой изготовили треугольник равно 10 Ом. Какой формы должен быть треугольник (где должна находиться его вершина (А)), чтобы



сопротивление между точками его основания (В-С) было бы минимальным. Определите это минимальное сопротивление.

При решении этой задачи вам нужно определить форму треугольника с минимальным периметром (при постоянной высоте и длине основания).

### Решение

Легко доказать, что минимальным периметр будет у равнобедренного треугольника. Для этого достаточно сравнить периметры прямоугольного треугольника и равнобедренного

Прямоугольный  $p = 1 + 1 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$  м

Равнобедренный  $p = 2 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \approx 2,24$  м

Таким образом, верхняя часть равнобедренного треугольника будет иметь сопротивление 22,4 Ом

Сопротивление между нижними точками (В-С) – это сопротивление при параллельном соединении проводников

$$R_{BC} = \frac{10 \cdot 22,4}{10 + 22,4} \approx 6,9 \text{ Ом}$$